Chap: Estimation Paramétrique.

$\exists$ VA $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ iid (échantillon)
$\longrightarrow$ de la $\mathbb{P}_\theta$ (θ: paramètre $\in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$)

Obj:

Des méthodes pour estimer θ
($\hat{\theta}_n$ est un estimateur de θ si
$\hat{\theta}_n = T(X_1, \dots, X_n)$
fct qui ne dépend pas de θ

Quelle qualité pour $\hat{\theta}_n$?
peut-on comparer des estimateurs de θ en terme de "qualité" ?!).

Deux méthodes d'estimation

① Estimateur par méthode de moment (Emm)

moment d'ordre k d'une VA X ($k\in\mathbb{N}^*$) est
$m_k := \mathbb{E}(X^k)$ (s'il existe).

Supposons $\theta = m_1 = \mathbb{E}(X)$
$\Rightarrow \hat{\theta}_n^{Emm} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$
= moy empirique

$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \mathbb{E}(X) = \theta$

; $\theta = m_k = \mathbb{E}(X^k)$
$\hat{\theta}_n^{Emm} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \overline{X^k_n}$

LGN (X_i^k iid) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_i^k) = \theta$

Si $\theta = g(m_1, \dots, m_k)$ fct des moments
$\hat{\theta}_n^{Emm} := g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right)$

Exemple:

- $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$ (Bernoulli)
$\theta = \mathbb{E}(X_i) \rightsquigarrow \hat{\theta}_n^{Emm} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

- $X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ $\boxed{?}$ $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\lambda}$
$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbb{E}(X_i)}$
$\rightsquigarrow \hat{\lambda}_n := \frac{1}{\overline{X}_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

- $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; et $\theta := (m, \sigma^2)$
$m = \mathbb{E}(X_i) \Rightarrow \hat{m}_n^{Emm} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
$\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2$
$\rightsquigarrow \hat{\sigma}_n^{2\,Emm} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$
$= \overline{X_n^2} - (\overline{X}_n)^2$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n^{Emm} = \left(\overline{X}_n, S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$

② Estimateur par maximum de vraisemblance (EMV)

Fct de vraisemblance:

$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ \text{ou } f_\theta(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

$\hat{\theta}_n^{EMV} \overset{def}{=} \underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmax}}\ \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)$

Ex:

$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$
$\overset{indep}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \begin{cases} \theta & \text{si } x_i = 1 \\ 1-\theta & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$
$= \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$
$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$
$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)) =$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \theta^{\left(\sum_1 x_i\right)-1} (1-\theta)^{n-\sum x_i}$

$-\theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1-\theta)^{n-\sum x_i - 1}$

$\mathcal{L} = 0 \iff$

$\theta^{\sum x_i - 1}(1-\theta)^{n-\sum x_i - 1}\left[\left(\sum x_i\right)(1-\theta) - \theta\left(n - \sum x_i\right)\right] = 0$

$]0,1[\iff \theta$

$\theta\left[-\sum x_i - n + \sum x_i\right] + \sum_1 x_i = 0$

$-n\theta + \sum x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\mathcal{L}\Big|_{\hat\theta} \dots < 0 \Rightarrow$ Concave autour $\hat\theta$

$\Rightarrow \hat\theta$ st un argmax

Concl : $\hat\theta_n^{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$

Ex 2 :

$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\theta = \lambda = \mathbb{E}(X)$

(ds $x_i \in \mathbb{N}$)

$\mathcal{L}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$

$\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$

$$\boxed{= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}}$$

$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\lambda^{(\sum x_i)-1} e^{-n\lambda} - n\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}\right)$

$= \frac{1}{\prod x_i!}\lambda^{(\sum x_i)-1} e^{-n\lambda}\left[\sum_{i=1}^n x_i - n\lambda\right]$

$\frac{\partial}{\partial\lambda} = 0 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x}_n}$

$\partial^2 \dots < 0 \Rightarrow \lambda_n^{EMV} = \frac{1}{n}\sum^{n} X_i = \overline{X}_n$

Ex 3 :

$X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ (on avait $\dots = \frac{1}{\theta}$)

$\hat\lambda^{EMM} = \frac{1}{\overline{X}_n}$

$\forall (x_i) > 0$

$\mathcal{L}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda e^{-\lambda x_i}\right)$

$= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$

$\frac{\partial}{\partial\lambda}$ $n\lambda^{n-1} e^{-\lambda\sum x_i} - \lambda^n\left(\sum x_i\right)e^{-\lambda\sum x_i}$

$= \lambda^{n-1} e^{-\lambda\sum x_i}\left(n - \lambda\sum x_i\right)$

$= 0$ ssi $\boxed{\hat\lambda = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}}$

$\Rightarrow \hat\lambda^{EMV} = \frac{1}{\overline{X}_n}$

$\mathcal{L}\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \dots < 0$

Ex 4 :

$X_i \sim \mathcal{U}nif([0,\theta])$

$\hat\theta_n^{EMM} = ?$

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\mathbb{E}(X_i)$

$\Rightarrow \hat\theta_n^{EMM} = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}\sum_1^n X_i$ (1)

$\mathbb{E}(X_i^2) = \int x^2 f_{X_i}(x)\,dx = \int x^2 \cdot \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)\,dx$

$= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x^2\,dx = \frac{\theta^3}{3\theta} = \frac{\theta^2}{3}$

$\Rightarrow \theta = \sqrt{3\mathbb{E}(X_i^2)} \sim \tilde{\hat\theta}_n = \sqrt{3\overline{X_n^2}}$ (2)

(1) $\neq$ (2)

$$f(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \right)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)}_{\mathbb{1}_{\max(x_i) \leq \theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\max(x_i) \leq \theta}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \max(x_i) > \theta \\ \frac{1}{\theta^n} & \text{— } \leq \theta \end{cases}$$

$$\hat{\theta}: \quad \operatorname{argmax} \mathcal{L} = \hat{\theta} = \max(x_i)$$

EMV

$$\hat{\theta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$$

III. Qualité d'un estimateur :

$(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid, de loi P_θ)

$\hat{\theta}_n$: un estimateur de θ

1. Estimateur sans biais (ESB)

$\hat{\theta}_n$ est un ESB si $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ ⚠

Ex: supp on a $\theta = \mathbb{E}(X_1)$

et $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbb{E}(X_i) = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_n$ est un ESB

Ex 2: supp $\theta = \mathrm{Var}(X_1)$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)}_{\mathbb{E}(X_1^2)} - \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left(\sum_i \sum_j (X_i X_j)\right)$$

$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=j} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i \neq j} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)}_{(\mathbb{E}(X_1))^2}\right]$$

$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n^2} \left[n \mathbb{E}(X_1^2) + (n^2 - n)(\mathbb{E}(X_1))^2\right]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(X_1^2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\mathbb{E}(X_1))^2$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right) \left[\mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2\right]$$

$$= \frac{n-1}{n} \mathrm{Var}(X_1) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \theta \Rightarrow$$

$\hat{\theta}_n$ est biaisé ($\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) \neq \theta$)

Il y a un estimateur corrigé :

$$S_n'^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\theta}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

$$(\Rightarrow \mathbb{E}(S_n'^2) = \mathrm{Var}(X_1) = \theta \Rightarrow \text{ES}$$

Rem: si $\hat{\theta}_n$ est un ESB de θ, cela ne veut pas dire nécessairement que $g(\hat{\theta}_n)$ est un ESB de $g(\theta)$!

[car $\mathbb{E}[g(\hat{\theta}_n)] \neq g(\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n))$ en général] car $\hat{\theta}_n$ ESB

2 Risque quadratique moyen (RQM) d'un estimateur.

On définit le risque quadratique moyen (RQM) de $\hat{\theta}_n$ par

$$\mathrm{RQM}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right]$$

(= distance au carré L^2 entre $\hat{\theta}_n$ et θ)

$$= \mathbb{E}\left[\left[(\hat{\theta}_n - \mathbb{E}(\hat{\theta}_n)) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta)\right]^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left((\hat\theta_n - \mathbb{E}(\hat\theta_n))^2 + (\mathbb{E}(\hat\theta_n) - \theta)^2 + 2(\hat\theta_n - \mathbb{E}(\hat\theta_n))(\mathbb{E}(\hat\theta_n) - \theta) \right)$$

$$Var(\hat\theta_n) + (\mathbb{E}(\hat\theta_n) - \theta)^2 + 2(\mathbb{E}(\hat\theta_n)-\theta)\,\underbrace{\mathbb{E}(\hat\theta_n - \mathbb{E}(\hat\theta_n))}_{0}$$

$$= Var(\hat\theta_n) + (\mathbb{E}(\hat\theta_n) - \theta)^2$$

$$\boxed{RQM(\hat\theta_n) = Var(\hat\theta_n) + (Biais(\hat\theta_n))^2}$$

Si $\hat\theta_n$ st un ESB $\Rightarrow$ alors $RQM(\hat\theta_n) = \boxed{Var(\hat\theta_n)}$

Idéalement : on veut un ESB et de variance minimale ($\Rightarrow RQM(\hat\theta_n)$ minimale)

si on a 2 stimateurs $\hat\theta_n^{(1)}$ et $\hat\theta_n^{(2)}$

on dit que $\hat\theta_n^{(1)}$ st meilleur que $\hat\theta_n^{(2)}$

$$RQM(\hat\theta_n^{(1)}) < RQM(\hat\theta_n^{(2)})$$

) Quantité d'information Borne FDCR

vraisemblance

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ f_{(X_1, \dots X_n)}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

log-Vraisemblance $= \log \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)$

$$\boxed{score := \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots X_n)\right)}$$

Calculons $\mathbb{E}(score)$

$$\mathbb{E}(score) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots X_n)}{\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots X_n)}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots x_n)} \mathcal{L}(\theta, x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int \mathcal{L}\, dx_1 \dots dx_n = 0$$

d'où $\mathbb{E}(score) = 0$

On définit la quantité d'information (de Fischer) par

$$\boxed{I_n(\theta) = Var(score)}$$

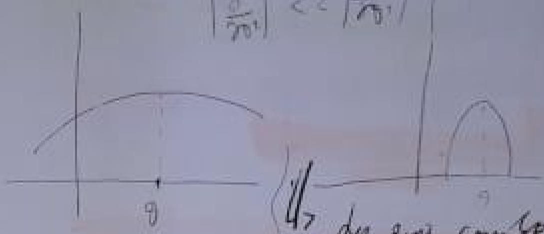
$$= \mathbb{E}(score^2) - \mathbb{E}(score)^2$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \log(\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n))\right]^2 \mathcal{L}(\theta, x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\overset{I.P.P(\dots)}{=} - \int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log \mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)\right) \cdot \mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots X_n)\right)\right]$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta^2}\right| << \left|\frac{\partial}{\partial\theta^2}\right|$$



$\Rightarrow$ la 2ème courbe st plus serrée autour de θ $\Rightarrow$ fournit plus d'info sur θ

$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\underbrace{\left(\log \mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)\right)}_{\log\left(\prod_{i=1}^n \mathcal{L}(\theta, X_i)\right) = \sum_{i=1}^n \log(\mathcal{L}(\theta, X_i))}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(\mathcal{L}(\theta, X_i))\right)}_{I_1(\theta)} \quad (iid)$$

$$= n I_1(\theta)$$

…ème : Borne FDCR

$\hat{\theta}_n$ est un ESB de θ

(et si on peut échanger $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ avec les $\int$ …)

Alors.

$$\boxed{Var(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{n I_1(\theta)}}$$

$\Rightarrow$ RQM est toujours >0.

Si on a un $\hat{\theta}_n$ (ESB) tq

$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n I_1(\theta)} \Rightarrow$ estimateur optimal

$\Rightarrow$ Si $\begin{cases} \hat{\theta}_n \text{ ESB} \\ \text{et } Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n I_1(\theta)} \end{cases}$

alors $\hat{\theta}_n$ est optimal (parmi tous les ESB)

1) Comportement asymptotique.

(X_i) iid de loi P_θ ($\theta \in \mathbb{R}^d$: paramètre à estimer)

- Un estimateur $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ de θ est dit convergeant ou consistant (fortement)

si $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \theta$, alors ~~$\hat{\theta}_n$ est dit asymptotiquement sans biais~~

(ou $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{en\ P} \theta$. faiblement convergent)

- Si $E(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta$, alors $\hat{\theta}_n$ est dit asymptotiquement sans biais

Théorème : (admis)

Si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ ("par max de vraisemblance"), alors : (sous des hypothèses de "régularité" …) sur $L(\theta, x_1, \dots, x_n)$

(i) $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \theta$

(ii) $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal avec

$$\sqrt{I_n(\theta)} \cdot (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{en\ loi} \mathcal{N}(0,1)$$

(où $I_n(\theta)$ = qté d'information de $(X_1, \dots, X_n)$)

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ est asymptotiquement optimal

(car $\Rightarrow \hat{\theta}_n - \theta \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{I_n(\theta)}})$

Variance minin. par la borne FDCR

$(X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow (aX+b) \sim \mathcal{N}($

2) Intervalles de confiance.

$\hat{\theta}_n$ est un estimateur quelconque de θ

On se fixe un seuil (risque) $\alpha \in [0,1]$ (Par ex : $\alpha = 5\%$) et on cherche un intervalle (ou domaine) I_α tq : (I_α aléatoire et dépend que des

$P(\theta \in I_\alpha) \geq 1 - \alpha$ = niveau de confiance

a) I.C pour la moyenne et pour échantillon normal :

(X_i) : iid $\sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

et $\theta = m$ (et on suppose σ^2 connu

I_α ?? tq $P(m \in I_\alpha) = 1 - \alpha$?

fct des (X_i)

[En] on cherche I_α sous la forme $I_\alpha = [\overline{X}_n - qqch, \overline{X}_n + qqch$

Normalisation : On sait que (voir …

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$1-\alpha = P(m \in I_\alpha) \approx P(Z \in I_\alpha) \quad \text{où } Z \sim N(0,1)$$

pour se débarrasser de l'inconnue m

$P(Z \in [-a,a])$ a ?

$$P(Z \in [-a,a]) = P\left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \in [-a,a]\right)$$

$$= P\left(m \in \left[\bar{X}_n - a\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} ; \bar{X}_n + a\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]\right)$$

Il suffit alors de poser :

$$I_\alpha = \left[\bar{X}_n - a\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} ; \bar{X}_n + a\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

avec a tq. $P(Z \in [-a,a]) = 1-\alpha$

$P(Z \in [-a,a]) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow F_Z(a) - F_Z(-a) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow 2F_Z(a) - 1 = 1-\alpha$

$\Rightarrow F_Z(a) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow a^* = F_Z^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$!

Cl :

$$I_\alpha = \left[\bar{X}_n - a^*\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X}_n + a^*\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

est un I.C de niveau $(1-\alpha)$ pour la moyenne m.

(la normalisation est dite aussi "fct pivotale")

Rq : Si les (X_i) ne sont pas normales, on sait qd n que $\frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ (TCL) $\Rightarrow$ un I.C asymptotique

+ Si m et σ^2 sont inconnus ??

→ l'idée est de remplacer σ^2 par son estimateur sans biais

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Mais la loi de la normalisation change !!

Soit $Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}}$, alors Z n'est plus de loi normale

mais on peut montrer (voir Ex 4 TD)

Z suit une loi appelée **loi de Student** de degré de liberté égal à $(n-1)$. on note :

$$Z \sim \mathcal{T}(n-1)$$

ou $(Z \sim St(n-1))$

$\approx N$

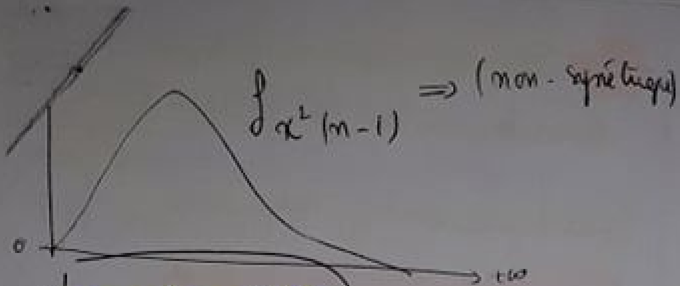
Et le a^* change alors aussi :

$a^* = F_Z^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ avec $\boxed{Z \sim \mathcal{T}(n-1)}$ (et non $N(0,1)$)

b) I.C pour σ^2 :

La loi de S_n^2 dépend de σ, mais on peut montrer qu'on a une fct pivotale (normalisation) qui élimine σ^2 :

on mq (voir TD) $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ suit une loi appelée 'khi-deux' de degré de liberté $(n-1)$: notée $\chi^2(n-1)$.



soit $Z = \frac{(n-1) S_n^2}{\sigma^2}$

On cherche un I.C pour σ^2 de la forme $J_\alpha = [0, b_\alpha S_n^2]$ et b_α à chercher tq $\mathbb{P}(\sigma^2 \in J_\alpha) = 1-\alpha$

$\mathbb{P}(\sigma^2 \in J_\alpha) = 1-\alpha \iff \mathbb{P}(\sigma^2 \in [0, b_\alpha S_n^2]) = 1-\alpha$

$$= \mathbb{P}(\sigma^2 \leq b_\alpha S_n^2)$$

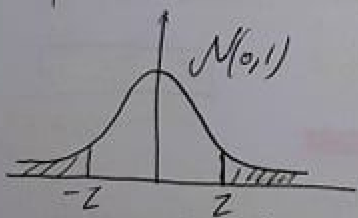
$$= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1) S_n^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)}{b_\alpha}\right)$$

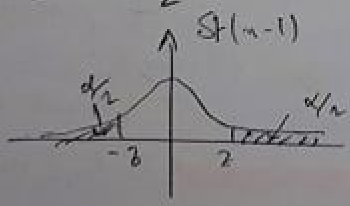
+ loi de Z est connue.

cl : on aura : 3 normalisations
3 lois (N, Student, khi-deux)
3 tables (⇒ calculs possibles)

Rq :

Pour les 3 normalisations, on cherche les "quantiles" z tq



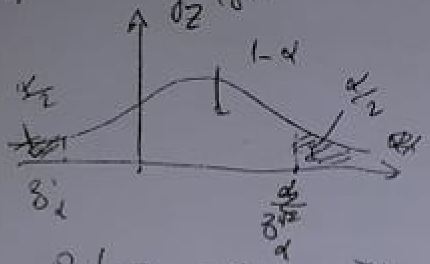


En résumé : I.C de niveau $1-\alpha$
(α petit en général)

$\Longleftrightarrow$ Trouver une "normalisation" (fct pivotale) Z et 2 réels z'_α et z''_α

tq

$f_Z(z)$



$$P(Z \in [z'_\alpha, z''_\alpha]) = 1-\alpha$$

(et : $\begin{cases} P(Z < z'_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \\ P(Z > z''_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

exemple

$$\underset{\mathcal{N}(0,1)}{Z} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \rightsquigarrow \text{I.C. pour } m \text{ à } \sigma^2 \text{ connue}$$

$$\underset{\to T(n-1)\ \text{(Student)}}{=} \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \rightsquigarrow \text{ ― inconnue}$$

(et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$

$$\underset{\chi^2(n-1)}{Z} = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \text{I.C pour } \sigma^2$$

khi-deux